

РАСЧЕТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СУДОВЫХ ВАЛОПРОВОДОВ МЕТОДОМ ГЛАВНЫХ КООРДИНАТ

*В.К. Румб, к.т.н., зав. кафедрой
Санкт-Петербургский государственный морской технический университет*

На основе анализа существующих методов расчета крутильных колебаний судовых валопроводов показана актуальность и необходимость их дальнейшего совершенствования. Разработана математическая модель и программное обеспечение для расчета крутильных колебаний валопроводов универсальным методом главных координат и приведены примеры его использования для решения задач проектирования и исследования колебаний различных механических систем.



Крутильным колебаниям судовых валопроводов посвящено настолько много работ, что казалось бы все о них известно и ничего нового придумать невозможно. Однако факты говорят об обратном. Методы расчета крутильных колебаний совершенствуются главным образом за счет применения компьютерных технологий. При этом идеология и сущность самих расчетов не меняется. По-прежнему расчеты базируются на идеализации валопровода моделями с дискретными параметрами. В основе расчета частот и форм свободных колебаний лежат итерационные вычислительные процедуры на базе так называемых рекуррентных зависимостей Терских, Толле, Хольцера. Их неоспоримое преимущество — возможность реализации без применения ЭВМ, так как они ориентированы на ручной счет. Расчет резонансных колебаний осуществляется на уравнении равенства работ вынуждающих и демпфирующих моментов. При этом вынуждающие моменты как от двигателя, так и от гребного винта подвергаются гармоническому анализу и в последующем рассматривают не все, а только некоторые гармоники. Еще более приближенными являются расчеты окolorезонансных и вынужденных колебаний.

Из сказанного следует, что методы расчета свободных, резонансных, окolorезонансных и вынужденных колебаний базируются на разных теоретических началах. Более того, представление вынуждающего момента в виде отдельных гармоник — операция искусственная, она нужна для того, чтобы реализовать упомянутые методы, но за счет снижения точности расчета. Естественно, предпринимаются попытки обойти эту операцию, например, путем решения системы дифференциальных уравнений, описывающих

крутильные колебания, методом численного интегрирования Рунге—Кутта 4-го порядка [1]. Между тем задачу о крутильных колебаниях можно решать не в обобщенных, а в главных координатах [2]. Эффективность метода главных координат (МГК) исходит из следующего:

- операция разложения вынуждающего момента в тригонометрический ряд становится лишней, поскольку МГК позволяет оперировать вынуждающими усилиями, заданными любыми зависимостями;

- результаты расчета по МГК представляют собой расчетные торсиограммы, аналогичные экспериментальным. При классических методах расчета получение теоретической торсиограммы является проблемой [3];

- МГК является универсальным, с его помощью можно с одинаковым успехом исследовать вынужденные, окolorезонансные и резонансные колебания, а расчет свободных колебаний становится всего лишь вспомогательной процедурой.

Рассмотрим более подробно математические аспекты МГК. Для дискретной цепной модели, имеющей p масс, крутильные колебания в обобщенных координатах описываются системой дифференциальных уравнений, которая в матричной форме имеет вид

$$[M]\{\ddot{\phi}\} + [B]\{\dot{\phi}\} + [C]\{\phi\} = \{Q\}, \quad (1)$$

где $[M]$, $[B]$ и $[C]$ — матрицы масс, демпфирования и жесткости, соответственно имеют размерность $(p \times p)$; $\{\phi\}$ и $\{Q\}$ — матрицы-столбцы обобщенных координат и вынуждающих усилий, причем усилия могут быть заданы произвольными законами.

Система (1) является взаимосвязанной, однако всегда можно подобрать такие координаты,

при которых (1) распадается на отдельные, не связанные между собой уравнения. Каждое из полученных таким образом уравнений содержит только одну переменную и может быть решено независимо от остальных. Координаты, позволяющие привести систему взаимосвязанных дифференциальных уравнений, описывающих колебательный процесс, к совокупности независимых друг от друга уравнений, в теории колебаний называются главными.

Переходу к главным координатам предшествует определение полного спектра частот свободных колебаний и соответствующих им коэффициентов распределения амплитуд. Применительно к дискретным моделям решение проблемы собственных значений удобно осуществлять итерационно в сочетании с прямыми методами преобразования матриц.

Частотное уравнение получается из (1) в результате выполнения тождеств $[B] = 0$ и $\{Q\} = 0$. С учетом принятых допущений (1) можно переписать так

$$[M]\{\ddot{\varphi}\} + [C]\{\dot{\varphi}\} = 0. \quad (2)$$

Известно, что решение (2) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\|[C] - \omega_e^2 [M]\| \{\mu\} = 0.$$

Для определения частот свободных колебаний мы используем итерационную процедуру анализа числа знакоперемен определителя $\|[C] - \omega_e^2 [M]\|$ в функции ω_e^2 . Матрица определителя приводится к треугольному виду в результате прямого хода по методу Гаусса (у треугольной матрицы все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю). Условием нахождения собственной частоты ω_e в интервале шага итерации является изменение знака определителя. При выполнении этого условия частота уточняется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность, т. е. удовлетворено требование

$$\det \|[C] - \omega_e^2 [M]\| \approx 0.$$

После уточнения определяются коэффициенты матрицы $\{\mu\}$, соответствующие найденной частоте. Эта процедура использует обратный ход метода Гаусса.

В результате реализации данного алгоритма на ЭВМ удается достаточно оперативно получить весь спектр частот свободных колебаний $\omega_{1,e}$ и соответствующие им матрицы коэффициентов распределения амплитуд $\{\mu\}_i$, где $i = 1, 2, \dots, p$. Для рассматриваемых цепных моделей низшая частота спектра $\omega_{1,e} = 0$, остальные $(p - 1)$ — вещественные и отличные друг от друга числа. Если $\omega_{1,e} = 0$, то матрица $\{\mu\}_1$ становится единичной, что соответствует недеформированному состоянию

упругой системы. Формальное объединение матриц столбцов $\{\mu\}_i$ дает квадратную матрицу форм свободных колебаний $[\mu]$, ее элементы целесообразно привести к нормированному виду по формуле

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_{ij}^0}{\sqrt{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\mu_{ij}^0)^2}}.$$

Элемент μ_{ij} нормированной матрицы форм свободных колебаний показывает относительную амплитуду колебаний i -й массы с j -й собственной частотой. Столбцы матрицы $[\mu]$, определяющие форму собственных колебаний, будут взаимно ортогональны. Его условие заключается в том, что сумма $\sum m_i \mu_{ij} \mu_{ik}$, распространенная на все массы дискретной модели, равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^p m_i \mu_{ij} \mu_{ik} = 0, \quad j \neq k.$$

Благодаря матрице форм свободных колебаний удается связать между собой обобщенные φ и главные γ координаты

$$\{\varphi\} = [\mu]\{\gamma\} \text{ и } \{\gamma\} = [\mu]^{-1}\{\varphi\}.$$

Также благодаря ортогональности матрицы $[\bar{M}]$ и $[\bar{\mu}]$, получаемые путем произведения на транспонированную матрицу $[\mu]^T$ и ее исходное значение, становятся диагональными

$$[\bar{M}] = [\mu]^T [M] [\mu] \text{ и } [\bar{C}] = [\mu]^T [C] [\mu].$$

Для полного перехода к главным координатам необходимо добиваться того, чтобы матрица $[\bar{B}] = [\mu]^T [B] [\mu]$ тоже стала диагональной. Это возможно, если удерживать в матрице $[\bar{B}]$ лишь те элементы, которые размещаются на главной диагонали. Во многом такой подход допустим в виду малости внедиагональных элементов матрицы $[\bar{B}]$ и потому, что важен только интегральный эффект от демпфирования и, следовательно, можно принимать любую гипотезу о диссипации колебательной энергии.

Аналогично приводятся к главным координатам вынуждающие усилия

$$\{\bar{Q}\} = [\mu]^T \{Q\}.$$

Данная запись показывает, что невозможно возбудить колебания только по одной главной координате. Наличие даже одного возмущающего усилия достаточно для того, чтобы колебания наблюдались по всем главным координатам. Другими словами, главным координатам также свойственна связанность колебаний, однако эта связанность обусловлена силовыми факторами.

После всех преобразований уравнение (1) в главных координатах будет иметь вид

$$[\bar{M}]\{\ddot{\gamma}\} + [\bar{B}]\{\dot{\gamma}\} + [\bar{C}]\{\gamma\} = \{\bar{Q}\}. \quad (3)$$

Как уже отмечалось, уравнение (3) представляет собой совокупность независимых друг от друга дифференциальных уравнений. Вид интеграла каждого уравнения в отдельности определяется правой частью. Например, если правая часть представляет собой усилие, заданное любым законом и действующее в течение конечного времени T , то его можно идеализировать непрерывной последовательностью элементарных импульсов. Тогда, используя принцип суперпозиции для линейных систем, уравнение колебаний массы будет определяться интегралом Дюамеля

$$\gamma(t < \tau < t + T) = \frac{1}{M\omega_e} e^{-ht} \int_t^{t+T} Q(\tau) e^{h\tau} \sin \omega_e(t - \tau) d\tau, \quad (4)$$

где τ — время начала действия элементарного импульса; h и ω_e — коэффициент затухания и круговая частота свободных колебаний:

$$h = \frac{\bar{B}}{2M}; \quad \omega_e = \sqrt{\frac{C}{M}},$$

где M , B и C — элементы матриц $[M]$, $[B]$ и $[C]$.

Интеграл, входящий в (4), вычисляется одним из численных методов, чаще методом Симпсона.

После прекращения действия вынуждающего усилия, т. е. по истечении времени $t + T$, имеют место затухающие колебания, которые описываются уравнением

$$\gamma(t) = e^{-ht} \left[\gamma_0 \cos \omega_e t + \left(\dot{\gamma}_0 + h\gamma_0 \right) \frac{1}{\omega_e} \sin \omega_e t \right], \quad (5)$$

где γ_0 и $\dot{\gamma}_0$ — соответственно деформация и ее скорость в момент времени $t + T$.

С помощью (4) и (5) можно моделировать колебательный процесс при повторяющихся усилиях. Для этого достаточно суммировать в дискретные моменты времени деформации, обусловленные последовательностью сил $Q(t)$. По существу алгоритм вычислений сводится к суммированию интегралов Дюамеля

$$\gamma = \gamma(t) + \frac{1}{M\omega_e} e^{-ht} \sum_{i=1}^n \int_t^{t+T} Q(\tau) e^{h\tau} \sin \omega_e(t - \tau) d\tau_i.$$

В случае непрерывного действия вынуждающего усилия применение интеграла Дюамеля становится затруднительным из-за необходимости учета целого множества элементарных импульсов, что в конечном итоге выливается в большое количество арифметических операций. В таком случае целесообразно использовать рекуррентные формулы, которые устанавливают зависимости между кинематическими параметрами смежных шагов интегрирования. Последовательно используя эти формулы, можно относительно просто смоделировать колебания одномассовой упругой системы с одной степенью свободы. С.П. Тимошенко предлагает рекуррентные формулы для

любого случайного возмущающего процесса, аппроксимированного прямоугольными импульсами (рис. 1). Согласно данным формулам реакция рассматриваемой системы в любом интервале времени $t_{i-1} \leq t < t_i$ будет определяться влиянием начальных условий в момент времени t_{i-1} и действием импульса на интересующем шаге Δt_i , т. е.

$$\gamma_i = e^{-h\Delta t_i} \left(\gamma_{i-1} \cos \omega_e \Delta t_i + \frac{\dot{\gamma}_{i-1} + h\gamma_{i-1}}{\omega_e} \sin \omega_e \Delta t_i \right) + \frac{Q_i}{C} \left[1 - e^{-h\Delta t_i} \left(\cos \omega_e \Delta t_i + \frac{h}{\omega_e} \sin \omega_e \Delta t_i \right) \right], \quad (6)$$

где γ_{i-1} и $\dot{\gamma}_{i-1}$ — перемещение и скорость массы в момент времени t_{i-1} .

Аппроксимация вынуждающего усилия кусочно-постоянной функцией не всегда оправдана по причине существенных погрешностей, связанных с заменой действительной площади площадью прямоугольника. Для уменьшения погрешности аппроксимации целесообразно пользоваться интерполирующими функциями более высокого порядка. На рис. 2 показана аппроксимация случайного возмущающего усилия кусочно-линейной функцией [4]. Очевидно, что такая аппроксимация может быть выполнена с достаточной точностью разбиением на соответствующее число участков, в пределах которых прямые практически не отклоняются от кривой. Такие отклонения незначительны даже при $\Delta t = \text{const}$. Для кусочно-линейной аппроксимации рекуррентные формулы принимают вид [4]

$$\gamma_i = e^{-h\Delta t_i} \left[\gamma_{i-1} \cos \omega_e \Delta t_i + \frac{\dot{\gamma}_{i-1} + h\gamma_{i-1}}{\omega_e} \sin \omega_e \Delta t_i \right] + \frac{Q_{i-1}}{C} \left[1 - e^{-h\Delta t_i} \left(\cos \omega_e \Delta t_i + \frac{h}{\omega_e} \sin \omega_e \Delta t_i \right) \right] + \frac{\Delta Q_i}{C\Delta t_i} \times \left[\Delta t_i - \frac{2h}{\omega_e^2} + e^{-h\Delta t_i} \left(\frac{2h}{\omega_e^2} \cos \omega_e \Delta t_i - \frac{\omega_e^2 - h^2}{\omega_e^3} \sin \omega_e \Delta t_i \right) \right]. \quad (7)$$

Выражение (7) дает перемещение массы в конце i -го участка, соответственно скорость получается простым дифференцированием (7):

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i = e^{-h\Delta t_i} & \left[-\gamma_{i-1} \sin \omega_e \Delta t_i + \frac{\dot{\gamma}_{i-1} + h\gamma_{i-1}}{\omega_e} \cos \omega_e \Delta t_i - \right. \\ & \left. - \frac{h}{\omega_e} \left(\gamma_{i-1} \cos \omega_e \Delta t_i + \frac{\dot{\gamma}_{i-1} + h\gamma_{i-1}}{\omega_e} \sin \omega_e \Delta t_i \right) \right] + \frac{Q_{i-1}}{C} e^{-h\Delta t_i} \times \\ & \times \left(1 + \frac{h^2}{\omega_e^2} \right) \sin \omega_e \Delta t_i + \frac{\Delta Q_i}{C\Delta t_i} \left[\frac{1}{\omega_e} - e^{-h\Delta t_i} \left\{ \frac{2h}{\omega_e^2} \sin \omega_e \Delta t_i + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_e^2 - h^2}{\omega_e^3} \cos \omega_e \Delta t_i + \frac{h}{\omega_e} \left(\frac{2h}{\omega_e^2} \cos \omega_e \Delta t_i - \frac{\omega_e^2 - h^2}{\omega_e^3} \sin \omega_e \Delta t_i \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, моделирование крутильных колебаний судового валопровода производится в такой последовательности:

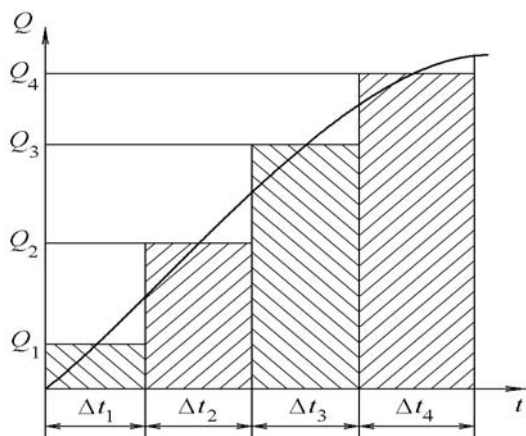


Рис. 1. Аппроксимация вынуждающего усилия кусочно-постоянной функцией

➤ формируются матрицы $[M]$, $[B]$ и $[C]$ общепринятыми правилами с использованием традиционных формул для элементов этих матриц;

➤ производится расчет свободных колебаний, по результатам которого строится матрица $[\mu]$;

➤ задаются внешние возмущающие усилия как со стороны двигателя, так и от гребного винта в виде графика или численно, но обязательно в функции времени;

➤ осуществляется переход к главным координатам в полном соответствии с приведенными выражениями, соблюдая правила матричного умножения;

➤ для каждого фиксированного момента времени вычисляются деформации γ всех масс и возвращаются к обобщенным координатам.

Понятно, что расчет колебаний валопровода МГК может быть произведен только на компьютере и при наличии специализированной программы. Пожалуй, первой такой программой является комплекс TORSION VIBRATION, разработанный И.Н. Несмеловым.

В качестве примера использования упомянутого программного комплекса на рис. 3 показана расчетная торсиограмма для гребного вала теплохода «Невский-25» с прямой передачей и главным двигателем 6NVD 48A-2U мощностью 485 кВт при 330 об/мин. При получении торсиограмм вынуждающие моменты как от двигателя, так и от гребного винта генерировались непосредственно программой функциями от угла поворота коленчатого вала. Крутящие моменты от ДВС в виде тангенциальных сил вычислялись по общепринятой методике силового анализа кривошипно-шатунного механизма.

Сама идеология МГК подсказывает, что этот метод инвариантен к задачам колебаний механических систем. Он одинаково пригоден для моделирования колебаний на установившихся и переходных режимах. С его помощью довольно легко прогнозировать колебания при работе дизельной

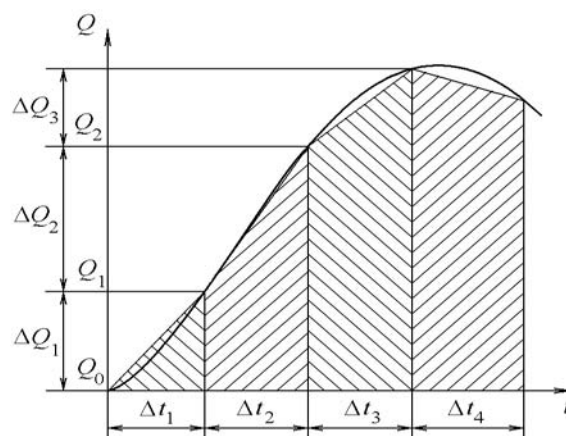


Рис. 2. Аппроксимация вынуждающего усилия кусочно-линейной функцией

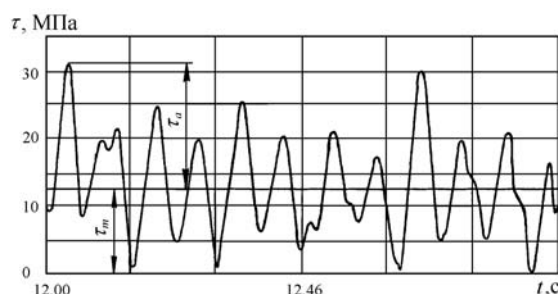


Рис. 3. Расчетная торсиограмма гребного вала теплохода «Невский-25» при 130 об/мин

установки с отключенными цилиндрами, при случайных вариациях индикаторных процессов в цилиндрах ДВС, обусловленных нестабильностью цикловой подачи, наполнением цилиндра и т. д. [5]. Работоспособность МГК доказана в четырех диссертациях, выполненных под руководством автора статьи.

Литература

1. Гальцев Ю.В., Шабанов А.Ю., Зайцев А.Б., Веремко И.А. Усовершенствованная методика расчета крутильных колебаний валопровода силовой установки с ДВС // Двигателестроение. — 2002. — № 3. — С. 21–24.

2. Румб В.К. Применение главных координат для моделирования ударно-колебательных процессов валопроводов судов ледового плавания // Науч.-техн. сб. НТО им. акад. А.Н. Крылова. — 1988. — Вып. 452. — С. 31–37.

3. Ефремов Л.В., Кудрявцев М.В., Иванов М.Ю. Моделирование торсиограмм и спектрограмм при расчете крутильных колебаний силовых установок // Науч.-техн. сб. Российского морского Регистра судоходства. — 2007. — Вып. 30. — С. 117–126.

4. Несмелов И.Н. Теоретическая оценка возможности расчета крутильных колебаний валопроводов судовых дизельных установок методом главных координат. Канд. дис. — СПб.: СПбГМТУ, 1996.

5. Нгуен Динь Тьонг. Учет случайных факторов при расчете крутильных колебаний валопроводов судовых дизельных установок методом главных координат. Канд. дис. — СПб.: СПбГМТУ, 2003.