

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ РОТОРНЫХ СИСТЕМ ТУРБОКОМПРЕССОРОВ С ПОДШИПНИКАМИ СКОЛЬЖЕНИЯ

А.А. Коженков, инженер  
ООО «Турбоком»

Рассмотрены методические и прикладные аспекты моделирования динамики роторных систем турбоагрегатов с подшипниками скольжения. Приведены результаты численного анализа и оптимизации роторной системы серийного турбокомпрессора с подшипниками, обеспечивающими демпфирование вибрации ротора при высоких скоростях вращения. Даны рекомендации по постановке и решению задач роторной динамики. Показано, что результаты адекватны эксперименту только при использовании редуцированного описания ротора и неподвижной системы координат. Применение вращающихся сеток физически обосновано только в задачах модального анализа роторных систем.

*Окончание. Начало см. № 2 (268) 2017*

### 3. О проблемах моделирования РС

В первой части статьи показано, что полная картина причин возникновения вибрации роторной системы (РС) — вынужденная дисбалансная прецессия, критические скорости, автоколебания — выявляется при анализе динамики РС на всех скоростных режимах работы.

В связи с этим перед исследователем встает вопрос выбора уровня КЭ модели РС и типа анализа задачи роторной динамики (РД), допускающих расчет при произвольной скорости ротора. К основным КЭ моделям РС относятся:

- стержневые модели (Beam elements) с редуцицией геометрии циклических деталей РС к осесимметричной;
- полностью трехмерные (3D Solid elements) модели формы и напряженно-деформированного состояния (НДС) роторной системы.

Под типом анализа понимается:

- модальный анализ, включающий определение частот и форм свободных колебаний РС;
- нестационарный (transient) анализ, основанный на пошаговом интегрировании уравнений движения РС по времени и пригодный для исследования переходных процессов и неустановившихся режимов.

Особенности применения стержневой модели в сочетании с нестационарным и модальным

анализом проиллюстрированы в первой части статьи на примере оптимизации РС серийного ТК.

Подробное рассмотрение инструментария, предоставляемого пакетами по РД [2], показывает, что без ограничений и с различными типами анализа могут использоваться только стержневые КЭ модели. Иными словами, создав полностью трехмерную модель осесимметричного ротора или ротора с циклическими рабочими колесами, пользователь не может рассчитать его амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) во всем диапазоне скоростей вращения, а лишь приближенно определить критические скорости.

Причины указанного состояния РД связаны с теоретическими проблемами 3D механики сплошных сред [3, 4], обсуждение которых в настоящей статье нецелесообразно. Поэтому особенности 3D моделирования только затронуты в разделе, посвященном расчету массивного ротора. При этом анализ уравнений движения 2D стержневых КЭ моделей позволяет показать, что моделирование в различных системах отсчета может привести к существенно отличающимся, в том числе нереальным результатам.

Определяющее влияние на корректную постановку и результаты решения задачи РД имеет трактовка понятия скорости собственного вращения ротора, подробно рассмотренного ниже применительно к роторной системе ТК.

### Системы отсчета (СО) и координат (СК) в РД

Под системой отсчета в механике упругих тел понимается совершающее программное движение недеформируемое отсчетное тело с неподвижной относительно него системой координат. Введенная указанным способом СО используется для моделирования деформируемого тела, перемещения и скорости которого в данной системе отсчета относительно малы [5, с. 92]. Перечислим признаки физических СО в роторной динамике.

Уравнения для упругих возмущений материала ротора в таких системах содержат, наряду с приложенными к ротору внешними силами, упругими реакциями материала и реакциями опор:

- инерционные силы, связанные с движением упругих возмущений в материале (нестационарные члены уравнений движения);

➤ инерционные силы, отражающие связь перемещений и скоростей возмущений со скоростью собственного вращения ротора.

Физические СО подчеркивают реальную (причинно-следственную) связь с ротором, в отличие от множества формальных (описательных) систем координат наблюдателя, которые могут быть использованы, но в которых такая связь отсутствует [6].

Принципиальным отличием применения инерциальной и неинерциальной систем (в нашем случае, соответственно, неподвижной и вращающейся) является необходимость указания для неинерциальной системы вращающегося отсчетного недеформируемого тела. Как показано ниже, для прецессионного движения общего вида в РД это возможно только для скоростей ротора, совпадающих с круговыми частотами его свободных прецессий.

Для полного соответствия принятой в РД терминологии отметим:

➤ под терминами «stationary frame» и «rotating frame» в расчетной практике понимаются инерциальная и вращающаяся СО и ассоциированные с ними СК;

➤ замена СО в роторной динамике означает (за исключением элементарных моделей) переход к решению иной задачи. Формальное преобразование СК не меняет физики задачи и, следовательно, результата.

#### Взаимодействие с источником энергии. Скорость собственного вращения (СВ) ротора

Источник энергии РС турбокомпрессора — отработавшие газы двигателя, вращающие турбину. Расчет мгновенного состояния газового потока в колесе и крутящего момента от давления газовых сил и срабатывания температурного напора в турбинной ступени при моделировании динамики ротора избыточно затратен.

Вместе с тем приемлемо рассмотрение момента на турбине как следящего, приложенного к актуальному положению смещенного и деформированного ротора ТК (рис. 7). Отметим, что момент не определяет направление вектора СВ, а лишь не препятствует инерционному вращению изогнутого вала как упругого гироскопа [7].

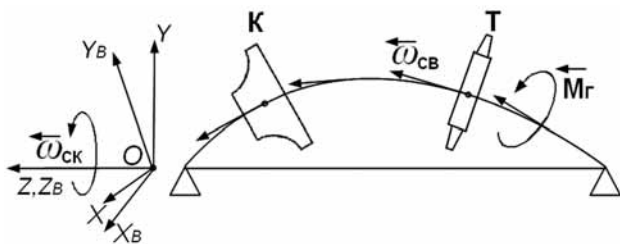


Рис. 7. Модель упругого ротора ТК

Далее, ТК относится к агрегатам с регулируемым оборотами. Энергия газов компенсирует нагрузки и механические потери системы, поддерживая скорость ротора на данном режиме ТК примерно постоянной. Последнее теоретически соответствует концепции двигателя неограниченной мощности. Отметим, что речь идет о постоянстве мгновенной скорости или о мгновенно устанавливаемом соответствии ее некоторому закону изменения во времени  $\omega = \omega(t)$ , например, при разгоне-выбеге ротора.

Предшествующие формулировки позволяют ввести в анализ РС понятие вектора угловой скорости собственного вращения — СВ ротора (self-rotating speed vector) и принять гипотезу о «сохранении» данного вектора для деформированного ротора.

В частности, для стержневой модели РС ТК следует принять скорость СВ  $\omega_{СВ}$  постоянной по модулю и направленной по касательной в каждой точке изогнутой оси вала [8] (см. рис. 7).

Данная гипотеза использована в методике расчета серийного ТК, приведенной в первой части статьи.

Подчеркнем важное для дальнейшего анализа несовпадение (в общем случае) векторов скорости СВ —  $\omega_{СВ}$  и скорости вращающейся системы координат  $OXBZB$  —  $\omega_{СК}$  (см. рис. 7).

#### 4. Моделирование динамики РС в различных системах координат. Неподвижная система координат (НСК)

Матричное уравнение движения роторной системы, дискретизированной с использованием метода КЭ, имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} - 2\alpha\mathbf{G}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

где  $\mathbf{U}$  — глобальный вектор перемещений и углов поворота сечений ротора и втулок;  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$  — матрицы инерции, гироскопических связей и жесткости;  $\mathbf{F}(t)$  — вектор дисбалансов, реакций подшипников, начальных напряжений в роторе и других сил;  $(\cdot)$  — оператор дифференцирования по времени в неподвижной СК.

Кратко опишем основные положения постановки и решения задачи:

➤ прецессии оси ротора моделируются в неподвижной декартовой системе координат  $OXYZ$  (stationary frame) с осью  $OZ$  по оси подшипников (см. рис. 7);

➤ используется редуцированная модель ротора с приведением лопаточных аппаратов колес к осесимметричным структурам и описанием неподвижной ДС материала по теории стержней;

➤ вычисляются проекции на оси неподвижной СК перемещений и углов поворота сечений РС;

➤ динамическая модель РС представляет собой совокупность КЭ элементов, описывающих



тических скоростей прецессий заданного направления и порядка  $\lambda$ .

Используется оно следующим образом. Рассмотрим свободное движение ротора  $\mathbf{F}_B(t) = 0$ . В системе координат с относительной скоростью  $\lambda$  прецессии порядка  $\lambda$  ведут себя как статические (вращаются вместе с системой), откуда их скорость и ускорение  $\dot{U}_B, \ddot{U}_B = 0$ . Это позволяет записать уравнение для определения угловых скоростей прецессий в виде

$$[\mathbf{K} - \omega_p^2(\mathbf{M} + \lambda \mathbf{G}^S)] = 0. \quad (4)$$

Например, при  $\lambda = \pm 1$  из (4) находим скорости всех прямых и обратных собственных прецессий 1-го порядка; при  $\lambda = \pm \infty$  — скорости прецессий, удвоенной в сравнении с роторной частотой и т. д. Знание частот внешних сил и частот прецессий позволяет прогнозировать резонансы РС.

Итак, уравнение (3) в ВСК, полученное из уравнений (1) в неподвижной системе, пригодно для частного случая исследования динамики РС — определения критических скоростей и форм прецессий различного порядка, т. е. для модального анализа.

Отметим одну важную деталь. Динамическая матрица жесткости в уравнении (3) содержит отрицательное слагаемое —  $\omega_p^2 \mathbf{M}$ , формально приводящее к потере устойчивости при некоторой скорости  $\omega_p^*$  вследствие обращения матрицы жесткости, записанной в ВСК, в ноль. Но решение в неподвижной системе не дает оснований для подобного вывода. Причина противоречия заключается в формальной трактовке отдельных членов уравнения (3) в ВСК.

Физика процесса состоит в следующем:  $\omega_p^*$  есть значение первой критической скорости, определенное из (4). Последнее означает, что при  $\omega = \omega_p^*$  пропорционально времени возрастает амплитуда вынужденной прецессии несбалансированного ротора без демпфирования, как это наблюдается на резонансе для линейных колебательных систем [9]. Собственные прецессии уравновешенного ротора на критической скорости неасимптотически (колебательно) устойчивы и имеют частоту, равную критической.

Уравнение в ВСК получим, исходя из уравнения колебаний в неподвижной системе, не используя гипотезу о направлении вектора СВ в деформированном состоянии. Для невращающегося уравновешенного ротора в НСК справедливо уравнение

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = 0. \quad (5)$$

Считая материал осесимметричного ротора однородным и изотропным и добавляя силы Кориолиса и переносной силы инерции по правилам

механики относительно движения, приходим к уравнению в ВСК

$$\mathbf{M}\mathbf{U}_B'' + 2\omega\mathbf{M}^A\mathbf{U}_B' + (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{U}_B = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6), полученное в предположении присутствия во вращающейся СК дополнительных динамических сил, действующих на ротор, физически тождественно уравнению (5). Математически оно соответствует замене переменных и переходу от абсолютного дифференцирования по времени в уравнении (5) к относительному (частному) дифференцированию в уравнении (6). Очевидно, что решения последнего есть проекции на оси ВСК перемещений, найденных из (5). Таким образом, уравнение (6) описывает колебания невращающегося ротора или прецессии вращающегося ротора с пренебрежимо малыми гироскопическими эффектами, что не характерно для РС ТК.

Проведенное рассмотрение позволяет дать следующие рекомендации:

> уравнения во вращающейся системе координат (3 и 4), полученные из уравнения (1) в неподвижной системе, могут использоваться только для модального анализа РС;

> формальное уравнение (6), составленное в ВСК без учета гироскопического момента и ориентации ротора в системе СВ, неверно описывает динамику реальных роторов;

> для стержневой редукции роторной системы при произвольной скорости вращения ротора  $\omega$  моделирование должно выполняться в инерциальной (неподвижной) системе отсчета и системе координат.

#### Особенности 3D моделирования ротора в ВСК

В работе [10] предложен метод расчета критических скоростей массивного ротора, представленного на рис. 9. Система отсчета и координат

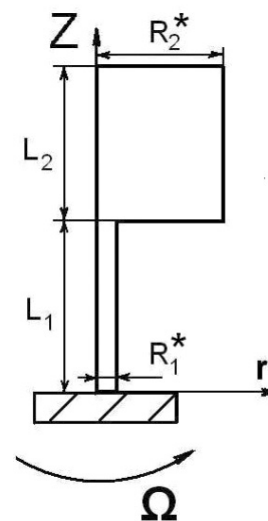


Рис. 9. Модель вращающегося ротора [8],

$$L_1 = L_2, R_2^*/R_1^* = 20$$

связаны с жесткой платформой  $O_1$ , вращающейся вокруг оси  $Z$  с постоянной скоростью  $\Omega$ .

Задача формулируется в тензорном виде. Соотношения трехмерной динамической теории упругости в точке материала с радиус-вектором  $R$  и перемещением  $u$  записаны во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\tau} + \rho(\Omega^2 u_2 - 2\Omega k \times u' - u'') &= -\rho \Omega^2 r_2; \\ R = r + u, \quad r_2 = r - kz, \quad u_2 = u - ku_z; \\ \underline{\tau} &= {}^4 C \cdot \cdot \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\varepsilon} = \nabla u^S, \quad u|_{O_1} = 0, \quad n \cdot \underline{\tau}|_{O_2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначения на рис. 9 и в формулах (7) имеют следующий смысл:  $O_1, O_2$  — поверхности заделки и нагрузок ротора;  $\rho$  — плотность материала;  $r_2, u_2$  — двумерные радиус и перемещение в плоскости, перпендикулярной оси  $Z$ ;  $\cdot, \times$  — символы скалярного и векторного произведения;  $(\cdot)'$  — оператор дифференцирования по времени в ВСК;  $\underline{\varepsilon}, \underline{\tau}, {}^4 C$  — тензоры деформаций, напряжений и упругих постоянных материала;  $(\cdot)^S$  — операторы градиента и симметризации тензора.

Как видно из (7), для расчетной схемы принята гипотеза о направлении вектора скорости  $\Omega$  по оси  $Z$  и, следовательно, о действии переносных сил и сил Кориолиса в плоскости перпендикулярной данной оси. Для определения критических скоростей используется уравнение статики сбалансированного ротора

$$\nabla \cdot \underline{\tau} + \rho \Omega^2 u_2 = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) отличается от обычного трехмерного частотного уравнения размерностью двумерного вектора  $u_2$  в инерционном члене.

Значения трех первых критических скоростей  $\Omega_k$ , определенных по (8), и частот изгибных колебаний  $\Omega_{k0}$  для невращающегося ротора приведены в таблице, часть 1.

Видно, что частоты  $\Omega_k$  превышают статические значения  $\Omega_{k0}$ . Повышение частот объясняется в [10] меньшей инерционностью плоских колебаний при вращении в сравнении с обычными 3D колебаниями. Динамические частоты  $\Omega_k$  трактуются как отличные от традиционных критических скоростей. Утверждается, что при  $\Omega > \Omega_1$  ротор в отсутствие демпфирования теряет устой-

чивость вследствие того, что его динамическая жесткость становится отрицательной. Проанализируем содержание [10].

Отметим, прежде всего, что постановка задачи качественно отличается от описанной выше, в которой скорость СВ ротора связана с изгибной деформацией вала, а гироскопический эффект явно описывается в уравнении движения ВСК (3).

Результаты расчета частот ротора (на рис. 9) по расчетной модели, выполненного автором по методике, основанной на уравнении (4), приведены в таблице, часть 2.

Как следует из таблицы, частоты  $\Omega_{k0}$  для двух методик хорошо совпадают, при этом основное отличие состоит в появлении для редуцированной стержневой модели обратных изгибных прецессий ротора с частотами  $\Omega_{k \text{обр}}$ . Стержневая модель показывает также более быстрый рост частот прямых прецессий от скорости  $\Omega$  вследствие ужесточающего действия гироскопического момента. Потери устойчивости при  $\Omega > \Omega_1$ , указанной в [10], не наблюдается.

Для дальнейшего рассмотрения перейдем от тензорного описания (7) в точке трехмерной среды к матрично-векторным формулировкам метода КЭ для узлов дискретной модели ротора. Уравнение (7) приобретет вид, подобный уравнению (6),

$$M U_B'' + 2\Omega M^A U_{2B}' + K U_B - \Omega^2 M U_{2B} = \Omega^2 M R_2, \quad (9)$$

где  $M, M^A, K$  — глобальные симметричная и асимметричная матрицы масс и матрица жесткости;  $U_B, R_2, U_{2B}$  — глобальные векторы трехмерных перемещений, двумерных радиусов и перемещений узлов.

Уравнения (6) и (9) отличаются присутствием в правой части (9) растягивающей нагрузки от центробежных сил (ЦБС) «в большом», зависящей от вектора  $R_2$  и характерной только для 3D модели ротора. Интегрально ужесточение ( $\Omega_k > \Omega_{k0}$ ) ротора при вращении можно объяснить действием момента силы  $F = \Omega^2 M R_2$ , подобного (но не аналогичного) действию гироскопического момента  $M_G = \omega^2 \rho \lambda G^S U_B$  в уравнении (3).

Для дополнительной проверки численных результатов методики [10] автором было выполнено альтернативное моделирование 3D колебаний ротора. Методом КЭ решалась задача модального анализа ротора, предварительно нагруженного ЦБС:

$$\begin{aligned} K U + M \ddot{U} &= \Omega^2 M R_2; \\ U &= A e^{i\Omega_k t} \Rightarrow K U - \Omega_k^2 M U = \Omega^2 M R_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Определение собственных частот из уравнения (10) было основано на модификации матрицы жесткости в соответствии с начальными дефо-

Частоты прецессий ротора

№	Частота прецессии, рад/с				
	Часть 1, [10]		Часть 2, автор		
	$\Omega = 0$	$\Omega = \Omega_k$	$\Omega = 0$	$\Omega_k (\Omega = \Omega_{k0})$	
	Прямая		Прямая	Обратная	
$k$	$\Omega_{k0}$	$\Omega_k$	$\Omega_{k0}$	$\Omega_k$	$\Omega_{k \text{обр}}$
1	5,37	5,89	5,44	6,40	4,58
2	44,1	80,2	44,0	84,4	30,2
3	2707	2718	2744	2799	2706

рмациями конструкции, т. е. решалась задача о собственных значениях для уравнения

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{K} + \beta \mathbf{K}_\varepsilon] - \Omega_k^2 \mathbf{M} &= 0; \\ [\beta \mathbf{K}_\varepsilon] \mathbf{U}_K &= \Omega_k^2 \mathbf{M} \mathbf{R}_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\mathbf{K}_\varepsilon$  — матрица начальных деформаций при единичном значении параметра нагрузки  $\beta$ .

Нагрузкой в нашем случае выступают ЦБС в правой части уравнений (10).

Итерационно найденные из (11) частоты с высокой точностью совпали с частотами  $\Omega_{k0}$  и  $\Omega_k$  таблицы, часть 1, что подтвердило эквивалентность (11) уравнению для критических скоростей (8) работы [10].

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы о реалистичности результатов, предложенной в [10], методики 3D моделирования роторов:

➤ уравнение (7) справедливо только для скоростей ротора  $\Omega = \Omega_k$ , т. е. при определении критических скоростей прямых прецессий ротора с относительными частотами  $\lambda = +1, +2, \dots$ ;

➤ уравнение (7) получено без учета изменения ориентации вектора скорости собственного вращения при деформации ротора, поэтому изначально является приближенным, а повышение динамических частот ( $\Omega_k > \Omega_{k0}$ ), под действием центробежных сил  $\mathbf{F} = \Omega^2 \mathbf{M} \mathbf{R}_2$ , лишь частично отражает гироскопические эффекты;

➤ предположение о неустойчивости ротора при  $\Omega > \Omega_1$  не доказано и не следует из уравнения для критических скоростей (8) или эквивалентного ему (11). Нулевых и мнимых частот  $\Omega_k$  (при которых возможна неустойчивость) уравнение (11) не содержит;

➤ потеря устойчивости уравновешенного ротора для  $\Omega > \Omega_1$  возможна при ограничении степеней свободы конструкции, когда возмущения, вызывающие свободные колебания, происходят в плоскости, вращающейся со скоростью ротора; расчетная схема модели на рис. 9 таких ограничений не отражает.

Отметим также вырожденность инерционно-жесткостных характеристик ротора, выбранного для численной иллюстрации методики [10]. На это указывает оценка его прогиба под действием силы тяжести. Используя известное значение частоты первой собственной формы, для прогиба центра масс горизонтального ротора имеем

$$U_{\text{ЦМ}} \approx g/\Omega_{10}^2 \approx -9,8/(5,37)^2 = -0,34 \text{ м}, \quad (12)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

Данному прогибу (на расстоянии от платформы 1,5 м) соответствуют наибольшие изгибные напряжения в заделке  $\sigma \approx 2 \cdot 10^3$  МПа. Полученное значение напряжений значительно превышает

пределы прочности машиностроительных материалов.

В целом представляется, что в работе [10] приведен 3D расчет традиционных критических скоростей прямых прецессий ротора. Введение «новых» критических скоростей и указание на потерю устойчивости ротора при  $\Omega > \Omega_1$  не обосновано. Противоречивость выводов носит методологический характер и следует из формальной трактовки инерционных сил в уравнениях ВСК, а также игнорирования в модели изменения направления скорости собственного вращения деформированного 3D ротора.

#### Заключение

Анализ постановки и решения задач роторной динамики для типичных конструкций РС ТК подтверждает, что корректные результаты получаются при использовании неподвижной (инерциальной) системы координат и редуцированной стержневой модели ротора.

Трехмерное описание динамического напряженно-деформированного состояния кругового и циклосимметричного ротора во вращающихся координатах в настоящее время строго не обосновано.

Применение вращающихся расчетных сеток возможно только для модального анализа роторных систем указанного типа.

Для создания полностью трехмерной РД необходимо разрешение фундаментальных проблем механики упругих сред в части пространственного (по Эйлеру) и материального (по Лагранжу) описания высокочастотных прецессионных движений, соответственно, в неподвижной и вращающейся СК.

Изложенное подтверждается анализом структуры КЭ уравнений 2–3D моделей роторов во вращающейся системе координат, а также известными реализациями метода КЭ в программных комплексах по роторной динамике [2].

#### Литература

- ANSYS Mechanical APDL Rotordynamic Analysis Guide, ANSYS, Inc., Release 15.0, 2013, 86 с., <http://www.ansys.com>
- Жилин Л.А. Рациональная механика сплошных сред: учебное пособие. — СПб: Изд-во СПбГПУ, 2012, 584 с.
- Подольский М.Е. О методе Эйлера в применении к кинематике и динамике твердого тела, Теория механизмов и машин, 2013, № 2. Т. 11. — С. 38–45. <http://tmm.spbstu.ru>
- Пальмов В.А. Фундаментальные законы природы в нелинейной термомеханике деформируемых тел, учебное пособие. — СПб: Изд-во СПбГПУ, 2008, 143 с.
- Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. — М.: Наука, 1987, 320 с.
- Николаи Е.Л. Теория гироскопов, Л.; М.: ОГИЗ, 1948, 171 с.
- Nelson, H.D., and McVaugh, J.M. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol. 98, № 2, May 1976. P. 593–600.
- Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1987, 304 с.
- Елисеев В.В., Орлов С.Г. О критических скоростях массивных упругих роторов. Теория Механизмов и Машин, 2005, № 1. Т. 3. С. 40–43, <http://tmm.spbstu.ru>